Language:Albanian

E shtunë, 28 Prill, 2012

Problem 1. Le të jenë *A*, *B* dhe *C* pikat që ndodhen në rrethin Γ me qendër në *O*. Supozojmë që $\angle ABC > 90^0$. Le të jetë *D* pika ku drejtëza *AB* pritet me drejtëzën pingule me *AC* në pikën *C*. Le të jetë ℓ drejtëza që kalon nëpër pikën D dhe që është pingule me *AO*. Shënoj me E pikën e prerrjes të drejtëzës ℓ me drejtëzën *AC*, ndërsa me F pikën e prerrjes të Γme ℓ dhe që ndodhet midis *D* dhe *E*.

Të provohet se rrathët e jashtëshkruar trekëndëshave *BFE* dhe *CFD* janë tangjent në pikën *F*.

Problem 2. Të provohet që

$$\sum_{cyc}(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} \geq 4(xy+yz+zx)$$

për gjithë numrat realë pozitive *x*, *y*, dhe *z*.

Shënimi në anën e majtë ka kuptimin

$$(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)}+(y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)}+(z+x)\sqrt{(y+z)(y+x)}.$$

Problem 3. Le të jetë *n* një numur i plotë pozitiv. Shënoj me $P_n = \{2^n, 2^{n-1}\cdot 3, 2^{n-2}\cdot 3^2, \cdots, 3^n\}$. Për çdo nënbashkësi *X* të P_n, shënojmë me S_X shumën e elementëve të *X-it*, me marëveshjen që $S_\emptyset = 0$ ku $\emptyset$ është bashkësia boshe. Supozoj që y është një numur real i tillë që $0 \leq y \leq 3^{n+1} - 2^{n+1}$.
Të provohet se ekziston një nënbashkësi *Y* e P_n e tillë që $0 \leq\ y - S_Y < 2^n$.

Problem 4. Le të jetë $\mathbb{Z}^+$ bashkësia e numrave të plotë pozitivë. Të gjenden gjithë funksionet $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ të tillë që plotësojnë dy kushtet:

i. $f(n!) = f(n)!$ për çdo numur të plotë pozitiv *n*,
ii. *m-n* plotëpjeston *f(m)-f(n)* për çdo dy numra të plotë pozitive të ndryshëm *m* dhe *n*.

Çdo problem vlerësohet me 10 pikë.
Kohaq në dispozicion: 4orë dhe 30 minuta.