Language: **Bulgarian**

Събота, 28 април, 2012 г.

Задача 1. Нека A, B и C са точки върху окръжност Γ с център O, като $\sphericalangle ABC > 90^\circ$. Нека D е пресечната точка на правата AB с правата през C, перпендикулярна на AC. Нека ℓ е правата през D, перпендикулярна на AO. Нека E е пресечната точка на ℓ и правата AC, а F е пресечната точка на Γ с ℓ, която лежи между D и E.

Да се докаже, че окръжностите, описани около триъгълниците BFE и CFD, се допират в точката F.

Задача 2. Да се докаже, че

$$\sum_{\text{cyc}}(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} \geq 4(xy+yz+zx)$$

за произволни реални положителни числа x, y и z.

Горният запис означава, че лявата страна е равна на

$$(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)}+(y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)}+(z+x)\sqrt{(y+z)(y+x)}.$$

Задача 3. Нека n е естествено число и $P_n = \{2^n, 2^{n-1}\cdot 3, 2^{n-2}\cdot 3^2, \ldots, 3^n\}$. За произволно подмножество X на P_n означаваме с S_X сумата на всички елементи на X с уговорката, че $S_\phi = 0$, където ϕ е празното множество. Нека y е реално число, за което $0 \leq y \leq 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

Да се докаже, че съществува помножество Y на P_n, за което $0 \leq y - S_Y < 2^n$.

Задача 4. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, за които са в сила двете условия:

(i) $f(n!) = f(n)!$ за всяко естествено число n,

(ii) $m - n$ дели $f(m) - f(n)$ за произволни различни естествени числа m и n.

(*С* $\mathbb{N}$ *е означено множеството на естествените числа.*)

Всяка задача се оценява с 10 точки.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.