Subota, 28.04.2012.

Zadatak 1. Neka su A, B i C točke kružnice Γ sa središtem O, takve da je $\sphericalangle ABC > 90°$. Neka je D točka presjeka pravca AB i okomice na AC u točki C. Neka je ℓ pravac koji sadrži točku D i okomit je na pravac AO. Dalje, neka je E točka presjeka pravaca ℓ i AC, a F ona točka presjeka kružnice Γ i pravca ℓ koja se nalazi izmedju točaka D i E.

Dokazati da se kružnice opisane oko trokutova BFE i CFD dodiruju u točki F.

Zadatak 2. Dokazati da nejednakost

$$\sum_{\text{cyc}}(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} \geqslant 4(xy+yz+zx)$$

važi za sve pozitivne realne brojeve x, y i z.

Suma na lijevoj strani gornje nejednakosti jednaka je

$$(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)}+(y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)}+(z+x)\sqrt{(y+z)(y+x)}.$$

Zadatak 3. Za prirodan broj n neka je $P_n = \{2^n, 2^{n-1}\cdot 3, 2^{n-2}\cdot 3^2, \ldots, 3^n\}$. Za svaki podskup X skupa P_n označimo sa S_X zbir svih elemenata skupa X, pri čemu je $S_\emptyset = 0$, gdje je $\emptyset$ prazan skup. Neka je y realan broj takav da je $0 \leqslant y \leqslant 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

Dokazati da postoji podskup Y skupa P_n za koji je $0 \leqslant y - S_Y < 2^n$.

Zadatak 4. Odrediti sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koje zadovoljavaju sljedeća dva uvjeta:

(i) $f(n!) = f(n)!$, za svaki prirodan broj n,

(ii) $m-n$ dijeli $f(m)-f(n)$, za sve različite prirodne brojeve m i n.

Svaki zadatak vrijedi 10 poena.

Vrijeme za rad: 4 sata i 30 minuta.