Language: Greek

Σάββατο, 28 Απριλίου 2012

Πρόβλημα 1. Έστω *A*, *B* και *C* σημεία επί ενός κύκλου Γ με κέντρο *O*. Υποθέτουμε ότι $\angle ABC > 90^0$. Έστω *D* το σημείο τομής της ευθείας *AB* με την ευθεία που είναι κάθετη στην *AC* στο σημείο *C*. Έστω ℓ η ευθεία που διέρχεται από το σημείο D και είναι κάθετη προς την ευθεία *AO*. Έστω E το σημείο τομής της ℓ με την ευθεία *AC*, και έστω F το σημείο τομής του Γ με την ℓ που βρίσκεται μεταξύ των σημείων *D* και *E*.

Να αποδειχθεί ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων *BFE* και *CFD* εφάπτονται στο σημείο *F*.

Πρόβλημα 2. Να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{cyc}(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} \geq 4(xy+yz+zx)$$

για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς *x*, *y*, και *z*.

Ο ανωτέρω συμβολισμός σημαίνει ότι το αριστερό μέλος είναι

$$(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} + (y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)} + (z+x)\sqrt{(y+z)(y+x)}.$$

Πρόβλημα 3. Έστω *n* ένας θετικός ακέραιος. Έστω $P_n = \{2^n, 2^{n-1}\cdot 3, 2^{n-2}\cdot 3^2, \cdots, 3^n\}$. Για κάθε υποσύνολο *X* του P_n, συμβολίζουμε με S_X το άθροισμα όλων των στοιχείων του *X*, με τη σύμβαση ότι $S_\emptyset = 0$ όπου $\emptyset$ είναι το κενό σύνολο. Υποθέτουμε ότι το y είναι ένας πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $0 \leq y \leq 3^{n+1} - 2^{n+1}$.
Να αποδειχθεί ότι υπάρχει υποσύνολο *Y* του P_n τέτοιο ώστε $0 \leq y - S_Y < 2^n$.

Πρόβλημα 4. Έστω $\mathbb{Z}^+$ το σύνολο των θετικών ακεραίων. Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ για τις οποίες ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

i. $f(n!) = f(n)!$ για κάθε θετικό ακέραιο n,
ii. *Ο m-n* διαιρεί τον *f(m)-f(n)* οποτεδήποτε οι *m* και *n* είναι διαφορετικοί θετικοί ακέραιοι.

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
ΔιαθέσιμοςΧρόνος: 4 ώρες και 30 λεπτά.