Language: **Kazakh**

Сенбі , 28 сәуір 2012жыл

Есеп № 1. Центрі *O* нүктесі болатын Г шеңберінің бойынан $\angle ABC > 90^0$ болатындай етіп *A*, *B* және *C* нүктелері алынған. *AB* түзуі мен *AC* түзуіне *C* нүктесінде түсірілген перпендикуляр *D* нүктесінде қиылысады. *D* нүктесінен өтетін *AO*-ға перпендикуляр түзуді *l* деп белгілейік. *l* мен *AC* түзулері *E* нүктесінде қиылысады. *D* мен *E*-нің арасында жатқан *l* мен Г-ның қиылысу нүктесін *F* деп белгілейік. *BFE* және *CFD* үшбұрыштарына сырттай сызылған шеңберлер *F* нүктесінде жанасатынын дәлелдеңдер.

Есеп № 2. Оң нақты *x*, *y* және *z* сандары үшін теңсіздікті дәлелдеңдер:

$$\sum_{cyc}(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} \geq 4(xy+yz+zx).$$

Мұнда теңсіздіктің сол жағында мына өрнек тұр:

$$(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)}+(y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)}+(z+x)\sqrt{(y+z)(y+x)}.$$

Есеп № 3. Берілген оң бүтін *n* саны үшін $P_n = \{2^n, 2^{n-1}\cdot 3, 2^{n-2}\cdot 3^2, \cdots, 3^n\}$ жиынын қарастырайық. P_n-нің кез келген *X* ішкі жиыны үшін S_X арқылы *X*-тің элементтерінің қосындысын белгілейік; $\emptyset$ бос жиыны үшін $S_\emptyset = 0$ болады. $0 \leq y \leq 3^{n+1} - 2^{n+1}$ болатын кез келген y нақты саны үшін $0 \leq\ y - S_Y < 2^n$ болатындай P_n-ның *Y* ішкі жиыны табылатынын дәлелдеңдер.

Есеп № 4. Біз Z^+ арқылы оң бүтін сандар жиынын белгілейік. Төмендегі шарттарды қанағаттандыратын барлық f: $Z^+ \to Z^+$, функциядарын анықтаңдар:
(i) әрбір оң бүтін *n* үшін $f(n!) = f(n)!$ орындалады;
(ii) кез келген әртүрлі оң бүтін *m* және *n* үшін $f(m)-f(n)$ саны $m-n$ санына қалдықсыз бөлінеді.

Әрбір есеп 10 ұпайға бағаланады
Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут