Language: **Russian**

Суббота, 28 апреля 2012 года

Задача № 1. На окружности Γ с центром в точке O выбраны точки A, B и C так, что $\angle ABC > 90^0$. Пусть D – точка пересечения прямой AB с перпендикуляром к прямой AC в точке C. Обозначим через l прямую, проходящую через D и перпендикулярную к прямой AO. Пусть E – точка пересечения l с прямой AC, а F – точка пересечения прямой l с окружностью Γ, лежащая между D и E. Докажите, что описанные окружности треугольников BFE и CFD касаются в точке F.

Задача № 2. Для положительных действительных чисел x, y и z докажите неравенство

$$\sum_{cyc}(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} \geq 4(xy+yz+zx).$$

Здесь в левой части неравенства стоит выражение

$$(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)}+(y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)}+(z+x)\sqrt{(y+z)(y+x)}.$$

Задача № 3. Пусть n – положительное целое число. Рассмотрим множество

$$P_n = \{2^n, 2^{n-1}\cdot 3, 2^{n-2}\cdot 3^2, \cdots, 3^n\}.$$

Для любого подмножества X множества P_n обозначим через S_X сумму элементов из X, при этом по определению полагаем $S_\emptyset = 0$ для пустого множества $\emptyset$. Выбрано произвольное действительное число y такое, что $0 \leq y \leq 3^{n+1}-2^{n+1}$. Докажите, что найдется подмножества Y множества P_n такое, что $0 \leq\ y - S_Y < 2^n$.

Задача № 4. Обозначим через Z^+ множество целых положительных чисел. Найдите все функции f: $Z^+ \to Z^+$, удовлетворяющие следующим условиям:

(i) $f(n!) = f(n)!$ для любого целого положительного n;

(ii) $f(m)-f(n)$ делится на $m-n$ для любых различных положительных целых m и n.

Каждая задача оценивается в 10 баллов

Время работы: 4 часа 30 минут