

Субота, 28.04.2012.

Задатак 1. Нека су A , B и C тачке кружнице Γ са центром O , такве да је $\sphericalangle ABC > 90^\circ$. Нека је D тачка пресека праве AB и нормале на AC у тачки C . Нека је ℓ права која садржи тачку D и нормална је на праву AO . Даље, нека је E тачка пресека правих ℓ и AC , а F тачка пресека кружнице Γ и праве ℓ , при чему се тачка F налази између тачака D и E .

Доказати да се описане кружнице троуглова BFE и CFD додирују у тачки F .

Задатак 2. Доказати да неједнакост

$$\sum_{\text{сус}} (x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} \geq 4(xy+yz+zx)$$

важи за све позитивне реалне бројеве x , y и z .

Сума на лијевој страни горње неједнакости једнака је

$$(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} + (y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)} + (z+x)\sqrt{(y+z)(y+x)}.$$

Задатак 3. За природан број n нека је $P_n = \{2^n, 2^{n-1} \cdot 3, 2^{n-2} \cdot 3^2, \dots, 3^n\}$. За сваки подскуп X скупа P_n означимо са S_X збир свих елемената скупа X , при чему је $S_\emptyset = 0$, гђе је \emptyset празан скуп. Нека је y реалан број такав да је $0 \leq y \leq 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

Доказати да постоји подскуп Y скупа P_n за који је $0 \leq y - S_Y < 2^n$.

Задатак 4. Одредити све функције $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ које задовољавају следећа два услова:

(i) $f(n!) = f(n)!$, за сваки природан број n ,

(ii) $m - n$ дијели $f(m) - f(n)$, за све различите природне бројеве m и n .

Сваки задатак вриједи 10 поена.
Вријеме за рад: 4 сата и 30 минута.