Language: **Serbian**

Субота, 28.04.2012.

Задатак 1. Нека су A, B и C тачке кружнице Γ са центром O, такве да је $\sphericalangle ABC > 90^\circ$. Нека је D тачка пресека праве AB и нормале на праву AC у тачки C. Нека је ℓ права која садржи тачку D и нормална је на праву AO. Даље, нека је E тачка пресека правих ℓ и AC, а F она тачка пресека кружнице Γ и праве ℓ која се налази између тачака D и E.

Доказати да се описане кружнице троуглова BFE и CFD додирују у тачки F.

Задатак 2. Доказати да неједнакост

$$\sum_{\text{cyc}} (x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} \geqslant 4(xy+yz+zx)$$

важи за све позитивне реалне бројеве x, y и z.

Сума на левој страни горње неједнакости једнака је

$$(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} + (y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)} + (z+x)\sqrt{(y+z)(y+x)}.$$

Задатак 3. За природан број n нека је $P_n = \{2^n, 2^{n-1}\cdot 3, 2^{n-2}\cdot 3^2, \dots, 3^n\}$. За сваки подскуп X скупа P_n означимо са S_X збир свих елемената скупа X, при чему је $S_\emptyset = 0$, где је $\emptyset$ празан скуп. Нека је y реалан број такав да је $0 \leqslant y \leqslant 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

Доказати да постоји подскуп Y скупа P_n за који је $0 \leqslant y - S_Y < 2^n$.

Задатак 4. Одредити све функције $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ које задовољавају следећа два услова:

(i) $f(n!) = f(n)!$, за сваки природан број n,

(ii) $m - n$ дели $f(m) - f(n)$, за све различите природне бројеве m и n.

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: 4 сата и 30 минута.